Поим за неопределен интеграл
Се дефинира примитивна функција и неопределн интеграл. Се дава таблица од основни интеграли и правила за интегрирање. The primitive function and non proper integral is defined. The table of non proper integrals is given.

ПОИМ ЗА НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ И НЕГОВО РЕШАВАЊЕ

Во делот диференцијално сметање за функција од една променлива, за дадена функција се бараше нејзиниот извод. Сосема прирородно е да се постави инверзната задача: како да се определи функцијата чии што извод е познат?

Дефиниција :

Функцијата $F(x)$ е **примитивна функција** за функцијата $f(x)$ на $[a,b]$ ако $\forall x \in [a,b]$ важи
Equation:

$$F^{'}(x) = f(x).$$

Бидејки важи
Equation:

$$[F(x) + C]^{'} = F^{'}(x) = f(x), C - \text{const},$$

тоа значи дека постои цела класа функции $F(x) + C$ кои меѓусебно се разликуваат за константа C и имаат ист извод $f(x)$.

***Дефиниција* :**

Нека $F(x)$ е примитивна функција за функцијата $f(x)$ на $[a,b]$. Множеството примитивни функции $F(x) + C$ се нарекува **неопределен интеграл** за функцијата $f(x)$ и се означува со

Equation:

$$\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + C.$$

Example:
Пример 1.
Познато ни е дека за функцијата $f(x) = \ln x$ изводот е $f^{'}(x) = \frac{1}{x}$, па оттаму со инверзна постапка (интегрирање)
$\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln \mid x \mid + C.$

Ознаката за интеграл $\int$е издолжена буква S и е воведена од Лајбниц. Тоа е првата буква од зборот сума, а потекнува од дефиницијата за определен интеграл кој се дефинира преку суми наречени интегрални суми.

Во неопределениот интеграл $\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + C$:

- изразот $f(x)\mathrm{dx}$ се нарекува **подинтегрален израз**;
- функцијата $f(x)$ се нарекува **подинтегрална функција**;
- C е **интегрална константа**.

Постапката за наоѓање на неопределен инеграл за функцијата $f(x)$ се нарекува **интегрирање** на функцијата $f(x)$.

Од дефиницијата за неопределен интеграл следува дека:

- **Equation:**

$$(\int f(x)\mathrm{dx})^{'} = (F(x) + C)^{'} = F^{'}(x) = f(x)$$

- **Equation:**

$$d\int f(x)\mathrm{dx} = d(F(x)+C) = \mathrm{dF}(x) = F^{'}(x)\mathrm{dx} = f(x)\mathrm{dx}$$

- **Equation:**

$$\int \mathrm{dF}(x) = F(x)+C.$$

Правила за интегрирање

За интегралите важат само следните две правила:

1. $\int(f(x)\pm g(x))\mathrm{dx} = \int f(x)\mathrm{dx} \pm \int g(x)\mathrm{dx}$

2. $\int \mathrm{Kf}(x)\mathrm{dx} = K\int f(x)\mathrm{dx}, (K - \mathrm{const})$.

Овие правила лесно се докажуваат со диференцирање на наведените равенства.

Таблица од основни интеграли

Аналогно како за изводите, и за интегралите се дава таблица од основни интеграли, а тоа се оние интеграли на кои се сведуваат сите интеграли кои може да се решат. Оваа таблица е инверзна на таблицата од изводи, бидејки и постапката интегрирање е инверзна на постапката диференцирање. Воглавно таблицата од основни интеграли е следната:

$\int x^n \mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln\mid x \mid + C$
$\int e^x \mathrm{dx} = e^x + C$
$\int a^x \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x \mathrm{dx} = -\cos x + C$
$\int \cos x \mathrm{dx} = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \tan x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{dx} = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} = \arctan x + C$
$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln\mid \frac{1+x}{1-x} \mid + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx} = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{dx} = \ln\mid x + \sqrt{1+x^2} \mid + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{dx} = \ln\mid x + \sqrt{x^2-1} \mid + C$

Таблица од основни интеграли (таблични интеграли)

Видовме дека за секоја непрекината функција лесно може да се најде нејзиниот извод, додека обратната задача е многу потешка. Може да се најде интеграл од непрекината функција само ако таа се сведе на некој наведените видови интеграли дадени во таблицата од основни интеграли. Затоа и задачата за решавање на интеграл, односно определувањето на примитивната функција не е само потешка задача туку во општ случај таа е нерешлива.

Example:
Пример 2.
Да се реши интегралот $\int \frac{\sqrt{x}+\mathrm{xa}^{x}-2\mathrm{x}^{2}}{3\mathrm{x}}\mathrm{dx}$.
РЕШЕНИЕ:
За решавање на оваа задача се применуваат двете правила за интегрирање

$$\int \frac{\sqrt{x}+\mathrm{xa}^{x}-2\mathrm{x}^{2}}{3\mathrm{x}}\mathrm{dx} =$$
$$= \int \frac{\sqrt{x}}{3\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \int \frac{\mathrm{xa}^{x}}{3\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \int \frac{-2\mathrm{x}^{2}}{3\mathrm{x}}\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{3}\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dx} + \frac{1}{3}\int a^{x}\mathrm{dx} - \frac{2}{3}\int x\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{a^{x}}{\ln a} - \frac{2}{3}\frac{x^{2}}{2} + C =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{a^{x}}{3\ln a} - \frac{x^{2}}{3} + C.$$

Example:
Пример 3.
Да се реши интегралот $\int \frac{1}{\cos 2\mathrm{x}+\sin^{2}x}\mathrm{dx}$.
РЕШЕНИЕ:
Бидејки подинтегралната функција не е функција содржана во таблицата од интеграли, со трансформации таа треба да се сведе на решлив-табличен вид. За таа цел се применуваат тригонометриските релацијии

$$\cos 2\mathrm{x} = \cos^{2}x - \sin^{2}x$$
и
$$\cos^{2}x + \sin^{2}x = 1$$
и интегралот е

$$\int \frac{1}{\cos 2\mathrm{x}+\sin^{2}x}\mathrm{dx} =$$
$$= \int \frac{\cos^{2}x+\sin^{2}x}{\cos^{2}x-\sin^{2}x+\sin^{2}x}\mathrm{dx} =$$
$$= \int \frac{\cos^{2}x+\sin^{2}x}{\cos^{2}x}\mathrm{dx} =$$
$$= \int \frac{\cos^{2}x}{\cos^{2}x}\mathrm{dx} + \int \frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}\mathrm{dx} =$$
$$= \int \mathrm{dx} + \int \frac{1-\cos^{2}x}{\cos^{2}x}\mathrm{dx} =$$
$$= x + \int \frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{dx} - \int \mathrm{dx} =$$

$= \tan x + C.$

Example:
Пример 4.

Да се реши интегралот $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\mathrm{dx}$.

РЕШЕНИЕ:

И оваа подинтегрална функција не е табличен случај, затоа најпрво квадрираме и вршиме подредување на собироците од броителот.

$\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\mathrm{dx} =$

$= \int \frac{1+2\mathrm{x}+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{dx} =$

$= \int \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{dx} + \int \frac{2\mathrm{x}}{x(1+x^2)}\mathrm{dx} =$

$= \int \frac{1}{x}\mathrm{dx} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} =$

$= \ln \mid x \mid + 2\arctan x + C$.

Мора да се нагласи дека при решавање на интегралите, само мал број од нив се основни. За таа цел постојат методи со кои интегралите се сведуваат на основни, а такви се методот на смена на променливата и парцијална интеграција.

Смена на променливата во неопределениот интеграл
Се прикажуваат повеќе смени на променливата во решавање на неопределениот интеграл. The method of substitution of the variable in non proper integral is shown.

СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВАТА ВО НЕОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Нека во интегралот
Equation:

$$\int f(x)\mathrm{dx}$$

подинтегралната функција $f(x)$ не е некоја од наведените во таблицата од основни интеграли. Ако за независната променлива x се воведе смена на променливата

$x=g(t),$

каде t е нова независна промелива, а $g(t)$ диференцијабилна функција, тогаш ако со смена на подинтегралниот израз
Equation:

$$f(x)\mathrm{dx}=f(g(t))g^{'}(t)\mathrm{dt}$$

се добие интеграл од основната талица, по интегрирање и враќање на првобитната променлива се добива решението на интегралот
Equation:

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g^{'}(t)\mathrm{dt}=F(t)+C=F(g^{-1}(x))+C.$$

Овој метод наречен **метод на смена на промеливата** се користи ако по новата променлива се добие основен интеграл, а после неговото решавање по новата промелива се враќаме на првобитната променлива.

Преку различни карактеристични примери ќе го прикажеме методот на смена на променливата во решавање на интегралите.

Пример 1.

Да се реши интегралот $\int \mathrm{sin3xdx}$.

За решавање на овој интеграл, за кој подинтегралната функција $\mathrm{sin3x}$ не е елементарна, се воведува смената
Equation:

$$\mathrm{3x}=t$$

и со нејзино диференцирање се добива
Equation:

$$\mathrm{3dx}=\mathrm{dt}\Rightarrow \mathrm{dx}=\frac{\mathrm{dt}}{3}.$$

Затоа решението на интегралот е
Equation:

$$\int \mathrm{sin3xdx} = \int \mathrm{sin}t\frac{\mathrm{dt}}{3} = \frac{1}{3}\int \mathrm{sintdt} = -\frac{1}{3}\mathrm{cos}t + C = -\frac{1}{3}\mathrm{cos3x} + C.$$

Пример 2.

Да се реши интегралот $\int \frac{1}{\mathrm{2x-3}}\mathrm{dx}$.

Интегралот не е табличен, но линеарниот член во именителот асоцира на табличен интеграл чие решение е логаритамска функција. Се воведува смената

$\mathrm{2x} - 3 = t \Rightarrow \mathrm{2dx} = \mathrm{dt} \Rightarrow \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{dt},$

со која интегралот се сведува на табличен и се решава:

$\int \frac{1}{\mathrm{2x-3}}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dt}}{t} = \frac{1}{2}\mathrm{ln} \mid t \mid + C = \frac{1}{2}\mathrm{ln} \mid \mathrm{2x} - 3 \mid + C.$

Пример 3.

Да се реши интегралот $\int x\sqrt{x^2+3}\mathrm{dx}$.

Во овој пример се забележува дека под знакот за квадратен корен се наоѓа квадратна функција, а во подинтегралната функција се наоѓа како множител линерна функција која е извод од квадратна функција. Затоа се корисити смената
Equation:

$$\begin{gathered} x^2 + 3 = t \\ \mathrm{2xdx} = \mathrm{dt} \Rightarrow \mathrm{xdx} = \frac{\mathrm{dt}}{2} \end{gathered}$$

и интегралот по новата променлива е решлив и табличен
Equation:

$$\int x\sqrt{x^2+3}\mathrm{dx} = \int \sqrt{t}\frac{\mathrm{dt}}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{1}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3} + C.$$

Пример 4.

Да се реши интегралот $\int \mathrm{tanxdx}$.

Поднитегралната функција $\mathrm{tan}x$ не е наведена во табличните интеграли и затоа во интегралот
Equation:

$$\int \mathrm{tanxdx} = \int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{dx}$$

се користи смената
Equation:

$$\cos x = t \Rightarrow -\mathrm{sinxdx} = \mathrm{dt}$$

со која интегралот е решлив
Equation:

$$\int \mathrm{tanxdx} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{dx} = -\int \frac{\mathrm{dt}}{t} = -\ln \mid t \mid +C = -\ln \mid \cos x \mid +C.$$

Аналогно, $\int \mathrm{cotxdx} = \ln \mid \sin x \mid +C$.

Пример 5.

Интегралот од облик $\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2}\mathrm{dx}$ се решава со негово сведување на табличниот интеграл $\int \frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}\mathrm{dx} = \arctan x + C$.

За таа цел интегралот се доведува во облик

$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{dx}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{dx}$

за кој се користи смената
Equation:

$$\frac{x}{a} = t \Rightarrow \mathrm{dx} = \mathrm{adt}$$

со која интегралот се решава
Equation:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{dx}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{adt}}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C.$$

Пример 6.

Со иста смена и аналогна постапка се решаваат и интегралите

$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{2a}}\ln \mid \frac{a+x}{a-x} \mid +C$
Equation:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{dx} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Equation:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\mathrm{dx} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \mid +C.$$

Пример 7.

Да се реши интегралот $\int \frac{1}{\sqrt{8+6\mathrm{x}-9\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx}$.

Квадратниот израз под квадратен корен се доведува до полн квадрат

$\int \frac{1}{\sqrt{8+6\mathrm{x}-9\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\sqrt{8+1-1+6\mathrm{x}-9\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\sqrt{9-(1-6\mathrm{x}+9\mathrm{x}^2)}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\sqrt{9-(1-3\mathrm{x})^2}}\mathrm{dx}$кој со смента

$1-3\mathrm{x} = t$
$\mathrm{dx} = -\frac{\mathrm{dt}}{3}$

се сведува на
Equation:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-(1-3\mathrm{x})^2}}\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}\mathrm{dt} = -\frac{1}{3}\mathrm{arcsin}\frac{t}{3} + C = -\frac{1}{3}\mathrm{arcsin}\frac{1-3\mathrm{x}}{3} + C.$$

Пример 8.

Да се реши интегралот $\int \frac{1}{2+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{dx}$.

Кога во подинтегралната функција се јавува корен, се воведува смена со која ќе се елиминира коренот. Затоа во овој пример се користи смента

$x+1 = t^3 \Rightarrow \mathrm{dx} = 3\mathrm{t}^2\mathrm{dt}$.

Со оваа смена интегралот е решлив и
Equation:

$$\int \frac{1}{2+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{dx} = 3\int \frac{t^2}{2+t}\mathrm{dt} = 3\int\left(t-2+\frac{4}{2+t}\right)\mathrm{dt} = 3\left(\frac{t^2}{2} - 2\mathrm{t} + 4\mathrm{ln}\mid t+2\mid\right) + C =$$
$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6\sqrt[3]{x+1} + 12\mathrm{ln}\mid\sqrt[3]{x+1}+2\mid + C,$$

бидејќи

$t^2 : (2+t) = t-2+\frac{4}{2+t}$.

Пример 9.

Да се реши интегралот $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\mathrm{dx}$.

Интегралите од обликот $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{dx}$ се решаваат со смената $x = a\mathrm{sin}t$.

Во дадената задача $a = 3$ и со воведување на смената
Equation:

$$x = 3\mathrm{sin}t$$
$$\mathrm{dx} = 3\mathrm{cos}t\mathrm{dt}$$

се добива

Equation:

$$\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}\mathrm{dx} = \int \frac{\sqrt{\left(9-9\sin^2 t\right)^3}}{3^6\sin^6 t}3\mathrm{costdt} = \frac{3^4}{3^6}\int \frac{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}{\sin^6 t}\mathrm{costdt} = \frac{1}{9}\int \frac{\sqrt{(\cos^2 t)^3}}{\sin^6 t}\mathrm{costdt} =$$
$$\frac{1}{9}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}\mathrm{dt} = \frac{1}{9}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t\sin^2 t}\mathrm{dt} = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{ctg}^4 t}{\sin^2 t}\mathrm{dt} = -\frac{1}{9\cdot 5}\mathrm{ctg}^5 t + C = C - \frac{1}{45}\mathrm{ctg}^5 t.$$

Од смената

$$x = 3\sin t \Rightarrow$$
$$\sin t = \frac{x}{3},$$
$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2},$$

и враќајки се на решението на интегралот и негово изразување преку променливата x се добива

Equation:

$$\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}\mathrm{dx} = C - \frac{1}{45}\mathrm{ctg}^5 t = C - \frac{1}{45}\frac{\cos^5 t}{\sin^5 t} = C - \frac{1}{45}\frac{1/3^5\sqrt{(9-x^2)^5}}{(x/3)^5} = C - \frac{1}{45}\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{x^5}.$$

Парцијална интеграција
Методот на парцијана интеграција се воведува како втор основен метод во решавање на интегралите.

Парцијална интеграција

Втор метод за решавање на интеграли е методот на парцијална интеграција.

Нека $u(x)$ и $v(x)$ се две диференцијабилни функции кои накратко ќе ги означиме со u и v. Диференцијалот од нивниот производ е
Equation:

$$d(\mathrm{uv}) = \mathrm{vdu} + \mathrm{udv}$$

кој по интегрирање е
Equation:

$$\int d(\mathrm{uv}) = \int \mathrm{vdu} + \int \mathrm{udv}$$

или
Equation:

$$\mathrm{uv} = \int \mathrm{vdu} + \int \mathrm{udv}$$

од каде се добива образецот за парцијална интеграција:
Equation:

$$\int \mathrm{udv} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{vdu}.$$

Методот на парцијална интеграција се применува кога се воочува дека обликот на подинтегралниот израз е пороизвод од функција (u) и диференцијал од друга функција (dv). Од функцијата u се бара нејзиниот диференцијал du, а од диференцијалот dv преку интегрирање се пресметува функцијата v и се применува образецот за парцијална интеграција. Одбирањето кој израз ќе се земе за u а кој за dv се врши преку согледување интегралот $\int \mathrm{vdu}$ да биде полесен за решавање.

Пример 1.

Да се реши интегралот
Equation:

$$\int \mathrm{xtg}^2\mathrm{xdx}.$$

Се воочува дека подинтегралниот израз е производ функцијата $u = x$ и диференцијалот $\mathrm{dv} = \mathrm{tg}^2\mathrm{xdx}$.

Од $u = x \Rightarrow \mathrm{du} = \mathrm{dx},$

а од
Equation:

$$\mathrm{dv} = \mathrm{tg}^2\mathrm{xdx} \Rightarrow v = \int \mathrm{tg}^2\mathrm{xdx} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} - \int \mathrm{dx} = -\mathrm{tgx} - x.$$

Затоа
Equation:

$$\int \mathrm{xtg}^2\mathrm{xdx} = x(\mathrm{tgx} - x) - \int (\mathrm{tgx} - x)\mathrm{dx} = \mathrm{xtgx} - x^2 + \ln \mid \cos x \mid + \frac{x^2}{2} + C =$$

Equation:

$$= \mathrm{xtgx} - \frac{x^2}{2} + \ln \mid \cos x \mid + C.$$

Пример 2.

Да се реши интегралот

$I = \int \ln^2 \mathrm{xdx}.$

За да се решни овој интеграл, се применува парцијална интеграција. Во овој пример нема дилема во одбирањето на изразот за u, бидејќи подинтегралната функција не е производ од функции. Затоа
Equation:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow \mathrm{du} = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{dx}$$

и
Equation:

$$\mathrm{dv} = \mathrm{dx} \Rightarrow v = x.$$

Решението на интегралот е

$I = \int \ln^2 \mathrm{xdx} = x\ln^2 x - 2\int \frac{x\ln x}{x}\mathrm{dx} = x\ln^2 x - 2\int \ln \mathrm{xdx}.$

Последниот интеграл $I_1 = \int \ln \mathrm{xdx}$ повторно се решава со парцијална интеграција во кој
Equation:

$$u = \ln x \Rightarrow \mathrm{du} = \frac{1}{x}\mathrm{dx}$$

и
Equation:

$$\mathrm{dv} = \mathrm{dx} \Rightarrow v = x$$

и има решение
Equation:

$$I_1 = \int \mathrm{lnxdx} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\mathrm{dx} = x\ln x - x.$$

Затоа решението на интегралот е

$I = x\ln^2 x - 2\int \mathrm{lnxdx} = x\ln^2 x - 2[x\ln x - x] = x\ln^2 x - 2\mathrm{xln}x + 2\mathrm{x} + C.$

Пример 3.

Понекогаш во постапката на решавање на интеграл може повторно да се вратиме на првобитниот интеграл. Таков е на пример

$I = \int e^x \mathrm{sinxdx}.$

За негово решавање се применува парцијална интеграција и сосема е сеедно која од функциите e^x или $\sin x$ се одбира за u.

Нека

$u = e^x \Rightarrow \mathrm{du} = e^x\mathrm{dx}$

и

$\mathrm{dv} = \mathrm{sinxdx} \Rightarrow v = \int \mathrm{sinxdx} = -\cos x.$

Применувајќи парцијална интеграција
Equation:

$$I = \int e^x \mathrm{sinxdx} = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\mathrm{dx}.$$

Новодобиентиот интеграл пак се решава со парцијална интеграција при што
Equation:

$$u = e^x \Rightarrow \mathrm{du} = e^x\mathrm{dx}$$

и
Equation:

$$\mathrm{dv} = \mathrm{cosxdx} \Rightarrow v = \int \mathrm{cosxdx} = \sin x$$

и интегралот

$I = -e^x\cos x + [e^x\sin x - \int e^x \sin x\mathrm{dx}] = -e^x\cos x + e^x\sin x - I.$

Забележуваме дека повторно се добива првобитниот интеграл и префрлувајќи го на левата страна во равенката се добива
Equation:

$$2\mathrm{I} = -e^x\cos x + e^x\sin x$$

или
Equation:

$$2\mathrm{I} = e^x(\sin x - \cos x)$$

од каде изразувајќи го I се добива решението
Equation:

$$I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

Методите на смена на променливата и парцијална интеграција многу често заеднички се применуваат во решавањето на интеграли. Тоа ке го илустрираме преку пример.

Пример 4.

Да се реши интегралот
Equation:

$$I = \int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}.$$

Најпрво се воведува смена на променливата

$\arcsin x = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx} = \mathrm{dt}.$

Од смената $\arcsin x = t \Rightarrow x = \sin t$ и интегралот се транформира во

$I = \int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx} = \int t\mathrm{sin}t\mathrm{dt}.$

Новодобиениот интеграл по промеливата t се решава со парцијална интеграција

$u = t \Rightarrow \mathrm{du} = \mathrm{dt},$

и

$\mathrm{dv} = \mathrm{sintdt} \Rightarrow v = \int \mathrm{sintdt} = -\cos t.$

Затоа

$I = \int t\mathrm{sintd}t = -t\cos t + \int \mathrm{costdt} = -t\cos t + \sin t + C.$

Сега останува да се вратиме на старат променлива x. Во решението на интегралот врз база на смената ставаме

$t = \mathrm{arcsin}x,$

$\mathrm{cos}t = \sqrt{1 - \mathrm{sin}^2 t} = \sqrt{1 - \mathrm{sin}^2(\mathrm{arcsin}x)} = \sqrt{1 - x^2},$

$\mathrm{sin}t = \mathrm{sin}(\mathrm{arcsin}x) = x,$

и решението на интегралот е
Equation:

$$I = -\sqrt{1 - x^2}\mathrm{arcsin}x + x + C.$$

Equation:

Интегрирање на тригонометриски функции
Со користење на некои тригонометриски идентитети се покажува како може да се решат некои видови на интеграли од тригонометриски функции.

Во случај кога подинтегралната функција е тригонометриска функција и така зададениот интеграл не е табличен, односно нерешлив, се применува некој тригонометриски идентитет кој го сведува зададениот интеграл на решлив. Такви тригонометриски идентитети се следните:
Equation:

$$\begin{gathered}\sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}\\ \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}\\ \sin ax\cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]\\ \sin ax\sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]\\ \cos ax\cos bx\frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x].\end{gathered}$$

Примената на овие тригонометриски идентитети се покажува преку примери.

Пример 1.

Да се пресмета
Equation:

$$\int\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{dx}.$$

Equation:

$$\int\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{dx} = \int\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{dx} = \sqrt{2}\int\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{dx} = -2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + C.$$

Пример 2.

Да се пресмета
Equation:

$$\int\sin 2x\sin 5x\,\mathrm{dx}.$$

Equation:

$$\int \mathrm{sin2xsin5xdx} = \frac{1}{2}\int[\cos(2-5)x - \cos(2+5)x]\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int[\cos(-3)x - \mathrm{cos7x}]\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{2}\int(\mathrm{cos3x} - \mathrm{cos7x})\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sin3x}}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sin7x}}{7} + C = \frac{\mathrm{sin3x}}{6} - \frac{\mathrm{sin7x}}{14} + C.$$

Пример 3.

Да се пресмета
Equation:

$$\int \tan^2\mathrm{xdx}.$$

Equation:

$$\int \tan^2\mathrm{xdx} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \tan x - x + C.$$

Пример 4.

Да се пресмета
Equation:

$$\int \tan^4\mathrm{xdx}.$$

Equation:

$$\int \tan^4\mathrm{xdx} = \int \tan^2 x \tan^2\mathrm{xdx} = \int \tan^2 x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} - \int \tan^2\mathrm{xdx}.$$

Првиот интеграл се решава со смената: $\tan x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$, а вториот интеграл е решен во претходната задача, затоа
Equation:

$$\int \tan^4\mathrm{xdx} = \int t^2\mathrm{dt} - (\tan x - x) + C = \frac{t^3}{3} - \tan x + x + C = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

Многу важни интеграли се:
Equation:

$$\int \sin^n\mathrm{xdx};$$
$$\int \cos^n\mathrm{xdx};(n \in N)$$

кои многу често се среќаваат во решавањето на интеграли и затоа ќе ја покажеме постапката за нивното решавање.

Пример 5.

За $n \in N$,да се пресмета

$I_n = \int \sin^n x dx$.

За $n = 1$, $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$.

За $n = 2$, $I_2 = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

За $n = 3$, $I_3 = \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx =$

$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx$.

Вториот интеграл се решава со смената $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Затоа

$I_3 = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Интегралите I_n за n непарен број се решаваат како последниот интеграл (I_3) со одвојување на најголемиот парен број од степенот и еден линеарен степен.

Но кога степенот е парен број или број поголем од 3, се применува методот на парцијална интеграција со која интегралот се сведува на интеграл со степен помал за два. Тоа се т.н. рекурентни формули (рекурентни формули се равенки кои прикажуваат одредена постапка или процес преку повторување на иста постапка).

Постапката за решавање на

$I_n = \int \sin^n x dx$

е преку следната парцијална интеграција:
Equation:

$$\begin{gathered} I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx \\ u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \\ I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx = \\ = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx. \end{gathered}$$

Се забележува дека после една примена на методот на парцијална интеграција, повторно се враќаме на првобитниот интеграл и на уште еден интеграл од ист облик, но со степен помал за 2. Означувајќи со $I_{\text{n-2}} = \int \sin^{n-2}\text{xdx}$, се добива

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{\text{n-2}} - (n-1)I_n,$$

односно решението на интегралот е

$$\int \sin^n \text{xdx} = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2}\text{xdx} + C.$$

Оваа рекурентна фомула пак може да се примени за решавање на I_{n-2}, која ќе се сведе на $I_{n-4}\ldots$ Постапката се применува се’ дека не се дојде до I_2 или I_1кои веќе ги решивме.

Пример 6.

Преку аналогна постапка се решаваат интегралите

$I_1 = \int \cos\text{xdx} = \sin x + C.$

$I_2 = \int \cos^2\text{xdx} = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2\text{x})\text{dx} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\text{x} + C.$

$I_n = \int \cos^n \text{dx} = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n} I_{\text{n-2}} + C.$

Интегрирање на дробнорационални функции
Кога подинтегралната функција е права дробнорационална функција, именителот се факторизира, а од обликот на тие фактори функцијата се разложува на елементарни дропки кои се полесни за интегрирање.

Најпрво да се потсетиме на поимот за полином и некои негови својства.

Функцијата
Equation:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

во која коефициентите $a_i(i = 0, \cdots, n)$ се константи и $a_0 \neq 0$, а n е природен број или нула се нарекува полином од n-ти ред по променливата x.

Два полинома од ист ред се еднакви ако им се еднакви коефициентите пред соодветните степени на променливата.

Равенката од облик
Equation:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

се нарекува алгебарска равенка, а нејзините n по број нули (решенија на ревнката) се реални или имагинарни.

Секој полином може да се претстави како производ од линерни фактори (множители) од обликот $x - a$ и/или квадратни фактори од обликот $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$ кои не се сведуваат на линерани фактори.

Количникот на два полинома $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ т.е. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ се нарекува дробнорационална функција. Ако за степените на полиномите од броителот и именителот важи:

- $n < m,$ функцијата е **права дробнорационална функција**;
- $n \geq m,$ функција е **неправа дробнорационална функција**.

Секоја неправа дробнорационална функција со делење може да се сведе на права.

Пример 1.

Сведување на права дробнорационална функција по претходно делење на полиномите од броителот и именителот:
Equation:

$$\frac{x^4 + 2\mathrm{x}}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2\mathrm{x} + 1}{x^2 + 1}.$$

Типови дробнорационални функции

Секоја права дробнорационална функција може да се разложи на сума од елементарни дробнорационални функции од обликот $\frac{A}{(x-a)^k}$ или $\frac{\mathrm{Bx}+C}{(\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c)^k}$ каде A,B,C се константи, а $k \in N$. Во

зависност од обликот на факторите од именителот, дробнорационалните функции се делат на четири типови и за секој од нив се дава постапка за нивно разложување со цел тие полесно да се интегрираат.

Тип I. Именител со различни линеарни фактори

Нека именителот на дробнорационалната функција се факторизира со различни линерани фактори. На секој линеарен фактор $x - a$ од именителот му соодветствува собирок од облик $\frac{A}{x-a}$, при што коефициентот A треба да се определи. Интегралот од овој тип дробнорационални функции е сума од логаритамски функции, бидејќи дробнорационалната функција се спретставува со сума од елементарни функции од облик $\frac{A}{x-a}$, а нивниот интеграл е
Equation:

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{dx} = A\ln \mid x-a \mid + C.$$

Пример 2.

Да се пресмета
Equation:

$$\int \frac{13x-6}{x^3+x^2-6\mathrm{x}}\mathrm{dx}.$$

Подинтегралната функција е дробнорационална и затоа најпрво се факторизира именителот:
Equation:

$$x^3+x^2-6\mathrm{x} = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3).$$

Бидејќи сите фактори на именителот се линерани и различни (именителот има три реални и различни нули), дробнорационалната функција се разложува на три собирока од обликот:
Equation:

$$\frac{13x-6}{x^3+x^2-6\mathrm{x}} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

и ако се ослободиме од именителот се добива
Equation:

$$13x-6 = A(x-2)(x+3) + \mathrm{Bx}(x+3) + \mathrm{Cx}(x-2)$$

и по средување на полиномот од десната страна по степените на x
Equation:

$$13x-6 = (A+B+C)x^2 + (A+3\mathrm{B}-2\mathrm{C})x - 6\mathrm{A}.$$

Определувањето на коефициентите A,B,C може да се изврши на два начина.

Прв начин:

Применувајќи ја особината за еднаквост на два полинома, од левата и десната страна на равенството, со изедначување на коефициентите пред соодветните степени на променливата x се добива системот линеарни равенки
Equation:

$$A + B + C = 0$$
$$A + 3\mathrm{B} - 2\mathrm{C} = 13$$
$$-6\mathrm{A} = -6$$

со чие решавање се определуваат вредностите на коефициентите: $A = 1$,$B = 2$,$C = -3$.

Втор начин:

Се поаѓа од равенството
Equation:

$$13x - 6 = A(x - 2)(x + 3) + \mathrm{B}\mathrm{x}(x + 3) + \mathrm{C}\mathrm{x}(x - 2)$$

кое е задоволено за секоја вредност на x,па специјално тоа е задоволено и за нулите на полиномот од именителот: $x_1 = 0$,$x_2 = 2$,$x_3 = -3$.

Заменувајќи за $x = 0$, се добива $-6 = -6\mathrm{A} \Rightarrow A = 1$,

за $x = 2$, се добива $26 - 6 = 2\mathrm{B}(2 + 3) \Rightarrow B = 2$,

а за $x = -3$, се добива $-39 - 6 = -3\mathrm{C}(-3 - 2) \Rightarrow C = -3$.

По определување на непознатите коефициенти, подинтегралната функција се запишува преку сума од елементарни дробнорационални собироци

$\frac{13x - 6}{x^3 + x^2 - 6\mathrm{x}} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 2} + \frac{-3}{x + 3}$,

а после интегрирање на двете страни од ова равенство се добива решениоето на интегралот
Equation:

$$\int \frac{13x - 6}{x^3 + x^2 - 6\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x}\mathrm{dx} + \int \frac{2}{x - 2}\mathrm{dx} + \int \frac{-3}{x + 3}\mathrm{dx} = \ln \mid x \mid + 2\ln \mid x - 2 \mid - 3\ln \mid x + 3 \mid + C,$$

и со средување на логаритамските функции решението е
Equation:

$$\int \frac{13x - 6}{x^3 + x^2 - 6\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \ln\frac{\mid x \mid (x - 2)^2}{\mid x + 3 \mid^3} + C.$$

Тип II. Именител со еднакви линеарни фактори

Ако при факторизација на именителот кој е од полином од n $-$ти ред се добие линеарен фактор но на степен k,$(2 \leq k \leq n)$, на секој фактор од облик $(x - a)^k$ во разложувањето на функцијата му

соодветствуваат k елементарни дробнорационални функции од обликот

$\frac{A_k}{(x-a)^k}, \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}, \ldots, \frac{A_1}{x-a},$

чии коефициенти A_k треба да се определат. Интегралите од овие собироци се

дробнорационални функции бидејќи
Equation:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} \mathrm{dx} = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}},$$

затоа решението на вториот тип дробнорационални функции е сума од логаритамски и вакви добнорацинални функции.

Пример 3.

Да се пресмета
Equation:

$$\int \frac{3\mathrm{x}+5}{x^3-x^2-x+1} \mathrm{dx}.$$

Согласно на постапката за интегрирање дробнорационални функции, именителот се факторизира:

$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2.$

Бидејќи линераниот фактор $x-1$ е со степен 2, разложувањето на подинтегралната функција е

$\frac{3\mathrm{x}+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3\mathrm{x}+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}.$

По множење со именителот
Equation:

$$3\mathrm{x}+5 = A(x-1)^2 + B(x+1) + C(x-1)(x+1)$$

и после средување на полиномот од десната старна на равенството
Equation:

$$3\mathrm{x}+5 = (A+C)x^2 + (B-2\mathrm{A})x + A + B - C,$$

коефициентите се определуваат преку ситемот равенки
Equation:

$$\begin{gathered} A+C=0 \\ B-2\mathrm{A}=3 \\ A+B-C=5 \end{gathered}$$

со решенија $A=\frac{1}{2}$,$B=4$,$C=-\frac{1}{2}$.

Од разложувањето на подинтегралната функција
Equation:

$$\frac{3\mathrm{x}+5}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1/2}{x+1}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{1/2}{x-1}$$

и нејзиното интегрирање

$\int\frac{3\mathrm{x}+5}{(x+1)(x-1)^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\mathrm{dx}+4\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{dx}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\mathrm{dx}=$
$\frac{1}{2}\ln\mid x+1\mid-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\mid x-1\mid+C$

се добива решението
Equation:

$$\int\frac{3\mathrm{x}+5}{(x+1)(x-1)^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\ln\frac{\mid x+1\mid}{\mid x-1\mid}-\frac{4}{x-1}+C.$$

Тип III. Именител со различни квадратни фактори

Третиот тип дробнорационални функции е случајот кога во факторизација на именителот се јавуваат и различни квадратни изрази од обликот $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c$ кои неможат да се редуцираат на линерни. На секој ваков квадратен фактор при разложување на подинтегралната функција му соодветствува елементарна дробнорационална функција од обликот
Equation:

$$\frac{\mathrm{Ax}+B}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c},$$

во која константите A,B треба да се определат. Интегралот од оваа функција е
Equation:

$$\int\frac{\mathrm{Ax}+B}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}=A\int\frac{x}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}+B\int\frac{1}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}=$$

Equation:

$$=\frac{A}{2\mathrm{a}}\int\frac{2\mathrm{ax}}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}+B\int\frac{1}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}=\frac{A}{2\mathrm{a}}\int\frac{2\mathrm{ax}+b-b}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}+B\int\frac{1}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}=$$

Equation:

$$=\frac{A}{2\mathrm{a}}\int\frac{2\mathrm{ax}+b}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}+(B-\frac{\mathrm{Ab}}{2\mathrm{a}})\int\frac{1}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}=\frac{A}{2\mathrm{a}}I_1+(B-\frac{\mathrm{Ab}}{2\mathrm{a}})I_2.$$

Како што се гледа, интегралот се сведува на два веќе познати за решавање интеграли I_1 и I_2. Првиот интеграл е

$I_1=\int\frac{2\mathrm{ax}+b}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx}=\ln\mid\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c\mid+C,$

а вториот интеграл е

$\int \frac{1}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4\mathrm{a}^2}+\frac{c}{a}}\mathrm{dx},$

кој во зависност од вредноста на коефициентите е некој од табличните интеграли.

Пример 4.

Да се пресмета

$\int \frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{dx}.$

Најпрво се факторизира именителот:
Equation:

$$1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2).$$

Именителот соджи два различни линеарни фактори и еден квадратен, па затоа припаѓа на третиот тип дробнорационални функции и се разложува на

$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{\mathrm{Cx}+D}{1+x^2},$

и се добива равенството
Equation:

$$x^2=A(1+x)(1+x^2)+B(1-x)(1+x^2)+(\mathrm{Cx}+D)(1-x^2)$$

преку кое се поределуваат коефициентите A,B,C,D. Нека за таа цел го примениме вториот метод со задавње на вредности за x.

Ако замениме за $x=1 \Rightarrow 1=A\cdot 2\cdot 2 \Rightarrow A=\frac{1}{4},$

за $x=-1 \Rightarrow 1=B\cdot 2\cdot 2 \Rightarrow B=\frac{1}{4},$

за $x=0 \Rightarrow 0=A+B+D$ и за $x=2 \Rightarrow 4=A\cdot 3\cdot 5+B\cdot(-1)\cdot 5+(2\mathrm{C}+D)(-3),$

од каде се добива ситемот равенки
Equation:

$$\begin{gathered} A+B+D=0 \\ 15A-5\mathrm{B}-6\mathrm{C}-3\mathrm{D}=4 \end{gathered}$$

и од веке пресметаните $A=B=\frac{1}{4}$, од првата равенка коефициентот $D=-A-B=-\frac{1}{2}$, додека од втората равенка $\frac{15}{4}-\frac{4}{4}-6\mathrm{C}+\frac{3}{2}=4 \Rightarrow C=0.$

Со оваа постапка дробнорационалната функција ја разложивме на елементарни дробнорационални собироци

$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{-1/2}{1+x^2},$

а нејзиниот интеграл е
Equation:

$$\int \frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{dx} = \int \frac{1/4}{1-x}\mathrm{dx} + \int \frac{1/4}{1+x}\mathrm{dx} + \int \frac{-1/2}{1+x^2}\mathrm{dx} = \\ -\frac{1}{4}\ln \mid 1-x \mid + \frac{1}{4}\ln \mid 1+x \mid - \frac{1}{2}\mathrm{arctan}x + C = \frac{1}{4}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|} - \frac{1}{2}\mathrm{arctan}x + C.$$

Тип IV. Именител со еднакви квадратни фактори

Нека именителот на подинтегралната дробнорационална функција е полином од n −ти ред кој содржи и квадратни фактори кои не се линеаризаираат и нека тие се од обликот $(\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c)^k$,$2 \leq k < n$. На секој ваков фактор од именителот во разложувањето на дробнорационалната функција му соодветствуваат k елементарни функции (дропки) од облик
Equation:

$$\frac{A_k x + B_k}{(\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c)^k}, \frac{A_{k-1}x + B_{k-1}}{(\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c)^{k-1}}, \ldots, \frac{A_2 x + B_2}{(\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c)^2}, \frac{A_1 x + B_1}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c},$$

чии коефицинети A_i,$B_i$$(i=1,\cdots,k)$ треба да се определат.

Пример 5.

Да се пресмета
Equation:

$$I = \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{dx}.$$

Именителот $(x^2+1)^2$ не може да се разложи на линеарни фактори, туку тој е квадратен фактор x^2+1 и тоа на степен 2. Затоа дробнорационалната функција се разложува
Equation:

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{\mathrm{Ax}+B}{(x^2+1)^2} + \frac{\mathrm{Cx}+D}{x^2+1}$$

од каде
Equation:

$$x^3+x-1 = \mathrm{Ax}+B+(\mathrm{Cx}+D)(x^2+1)$$

и по средување на полиномот од десната страна на равенството

$x^3+x-1 = \mathrm{Cx}^3+\mathrm{Dx}^2+(A+C)x+B+D$

и примена на методот на неопределени коефициенти се добива ситемот равенки
Equation:

$$C = 1$$
$$D = 0$$
$$A + C = 1$$
$$B + D = -1$$

со решенија $A = 0, B = -1, C = 1, D = 0$.

По опредеување на разложувањето

$\frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}$,

равенството се интегрира

$I = \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} = \int \frac{-1}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} + \int \frac{x}{x^2+1} \mathrm{dx} =$
$- \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} + \frac{1}{2} \int \frac{2\mathrm{x}}{x^2+1} \mathrm{dx} =$
$- \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} + \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) =$
$- \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{dx} + \int \frac{x \cdot x}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$

За вториот интеграл се применува парцијална интеграција:
Equation:

$$u = x \Rightarrow \mathrm{du} = \mathrm{dx}$$
$$\mathrm{dv} = \frac{x}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} \Rightarrow v = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} = \frac{1}{2} \int \frac{2\mathrm{x}}{(x^2+1)^2} \mathrm{dx} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{dt}}{t^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)},$$

и затоа
Equation:

$$I = -\mathrm{arctan} x - x \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{dx} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) =$$

Equation:

$$= -\mathrm{arctan} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \mathrm{arctan} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C,$$

и по средување, интегралот е
Equation:

$$I = -\frac{1}{2} \mathrm{arctan} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$